

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

*Павлецов М. М., Перевалова Т.В.*

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,  
Екатеринбург, Россия

[evlucid@gmail.com](mailto:evlucid@gmail.com), [tatyana.perevalova@urfu.ru](mailto:tatyana.perevalova@urfu.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается дискретная модель, которая описывает динамику взаимодействия двух потребителей. В рамках детерминированного анализа была изучена зона сосуществования как минимум двух равновесий. Были определены зоны сосуществования трех и более устойчивых аттракторов, описаны бифуркационные сценарии. Показана фрактальная структура бассейнов притяжения аттракторов. Было изучено воздействие на систему аддитивного и параметрического шумов. С помощью функции стохастической чувствительности был проведен сравнительный анализ чувствительности равновесий и циклов. Опираясь на метод доверительных эллипсов получены значения интенсивности шума, при которых наблюдается переход с одного аттрактора на другой, а также формирование нового аттрактора.

**Ключевые слова:** поведение потребителей, бифуркационный анализ, стохастический анализ, параметрический шум, аддитивный шум, функция стохастической чувствительности, индуцированные шумом переходы.

## COMPUTER MODELING AND ANALYSIS OF MULTISTABILITY IN AN INTERACTION BETWEEN TWO CONSUMERS MODEL

*Pavletsov M., Perevalova T.*

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Ural Federal  
University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin», Ekaterinburg,  
Russia

**Abstract.** The paper describes a discrete time model that describes the dynamics of interaction between two consumers. Within the deterministic analysis, zone of coexistence of at least two equilibria was found. The zones of coexistence of three and more attractors were determined, and the bifurcations were described. The fractal structure of the basins of attraction were shown. The behavior of stochastic version of this model is described. The effect of additive and parametric noise on the system was studied. Using the stochastic sensitivity function, a comparative analysis of the sensitivity for equilibria and cycles was carried out. Based on the method of confidence ellipses, values of the noise intensity at which a transition from one attractor to another is observed. The formation of a new stochastic attractor was obtained.

**Key words:** consumer behavior, bifurcation analysis, stochastic analysis, parametric noise, additive noise, stochastic sensitivity function, noise-induced transitions.

В работе рассматривается стохастическая модель потребления, основанная на детерминированной модели, которая изначально появилась в [1], описывающая взаимодействие в сети потребителей.

В данной модели каждый индивид корректирует свои предпочтения исходя из своего прошлого опыта потребления и опыта потребления другого индивида. Случайное воздействие на систему оказывает либо аддитивный, либо параметрический шум. Аддитивный шум характеризует разницу в количестве приобретаемых и потребляемых товаров. В экономике этот феномен известен как «дерево Лукаса» («Lucas tree»). Параметрический шум описывает ситуацию, когда один из потребителей не обладает информацией о доходах второго, при том, что второй полностью информирован о доходах первого. Таким образом, динамика потребляемых товаров двумя потребителями с течением времени может быть описана системой стохастических разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{1t+1} = \frac{b_1}{p_x p_y} (a_1 x_{1t} (b_1 - p_x x_{1t}) + D_{12} x_{2t} (b_2 - p_x x_{2t})) + \varepsilon \left( \xi_1 \sigma_1 + \xi_3 \sigma_3 \frac{b_1 D_{12}}{p_x p_y} x_{2t} \right), \\ x_{2t+1} = \frac{b_2}{p_x p_y} (a_2 x_{2t} (b_2 - p_x x_{2t}) + D_{21} x_{1t} (b_1 - p_x x_{1t})) + \varepsilon \xi_2 \sigma_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь переменные  $x_1$  и  $x_2$  — это единицы товара, потребляемого первым и вторым индивидами в зависимости от момента времени  $t$ ,  $p_x$  и  $p_y$  — стоимость товаров  $x$  и  $y$ . Параметры  $b_1$  и  $b_2$  определяют постоянный доход первого и второго индивида. Параметры «обучения»  $a_1$  и  $a_2$  отражают весовой коэффициент первого и второго потребителя, учитывая собственный опыт потребления, а параметры «влияния»  $D_{12}$  и  $D_{21}$  отражают вес, с которым учитывается опыт индивидуума. Значения  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  являются независимыми случайными величинами с нормальным распределением  $N(0,1)$ , а  $\varepsilon$  — константа, отвечающая за интенсивность шума. Константы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  за свойство шума, при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$ , шум — аддитивный, при обратных значениях — параметрический. В данной работе значения параметров будут зафиксированы следующим образом:  $p_x = \frac{1}{4}$ ,  $p_y = 1$ ,  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 20$ ,  $a_1 = 0.0002$ ,  $a_2 = 0.00052$ .

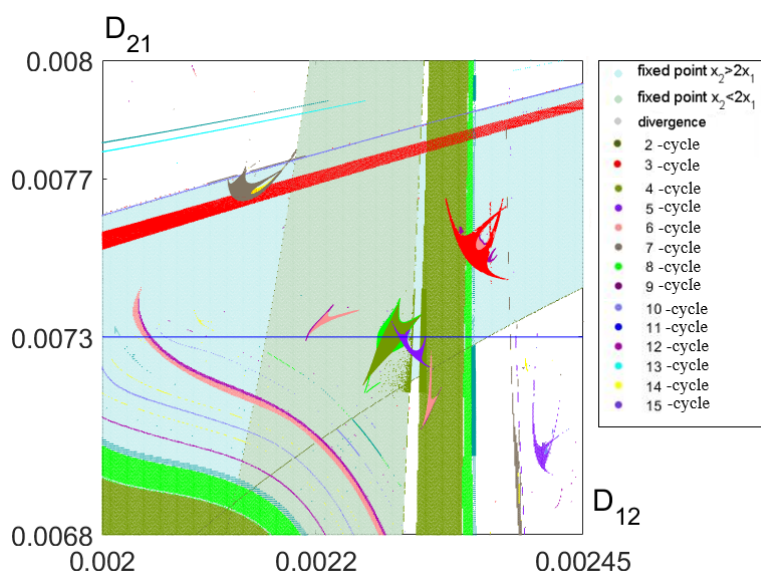


Рисунок 1 – Карта режимов

Объектом детерминированного анализа является поведение системы (1.1) при отсутствии случайного возмущения ( $\varepsilon = 0$ ). На рисунке 1 в области параметров  $D_{12} \in [0.002, 0.0025]$  и  $D_{21} \in [0.0068, 0.008]$ , изображена карта динамических режимов. Здесь цветами выделены области равновесий и циклов периода до 15, белые области соответствуют циклам более высоких периодов, замкнутым инвариантным кривым или хаотическим аттракторам. На рисунке 2 представлена бифуркационная диаграмма при изменении параметра  $D_{12} \in [0.002, 0.0025]$  и  $D_{21} = 0.0073$ . На ней представлены  $EM$  - параметрическая граница экономической значимости и следующие бифуркации:  $SN_1$  - седло-узловая равновесия,  $SF_1$  - субкритическая флип,  $C$  - кризис,  $NS_1$  - Неймарк-Саккер равновесия,  $SN_4$  - седло-узловая цикла периода 4,  $SF_1$  - субкритическая флип,  $BO$  - бифуркация взрыва и  $SN_1$  - седло-узловая равновесия.

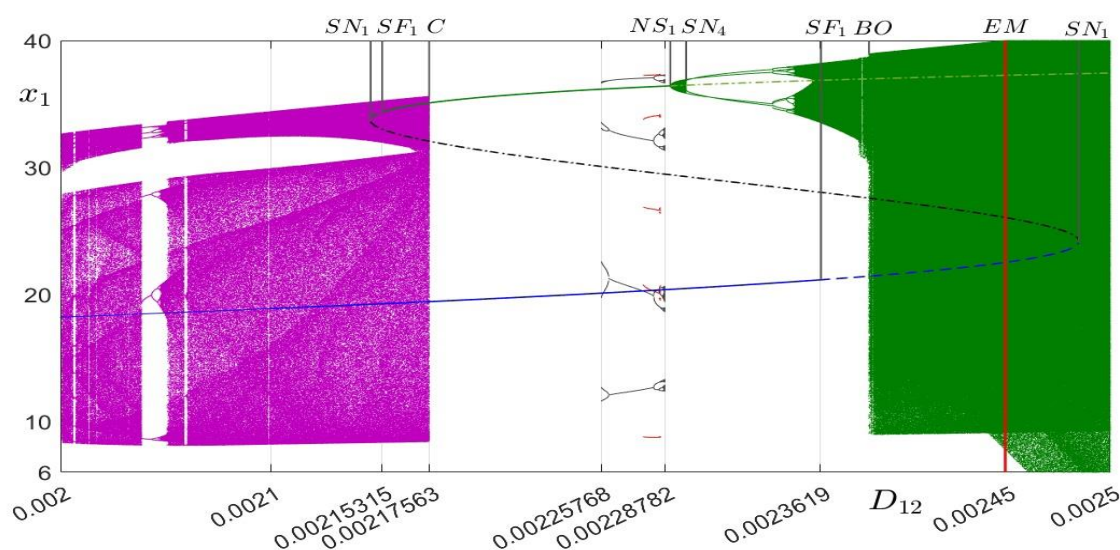


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма при  $D_{21} = 0.0073$

На рисунке 3 представлены бассейны притяжения аттракторов для двух значений параметра, когда в системе сосуществуют 3 аттрактора – два

равновесия и цикл периода 4 ( $D_{21} = 0.0073, D_{12} = 0.002271$ ) и 4 аттрактора – два равновесия и два цикла периода 4 и 5 ( $D_{21} = 0.0073, D_{12} = 0.00228$ ). На рисунке видна фрактальная структура бассейнов притяжения аттракторов.

Далее в работе проводился стохастический анализ опираясь на прямое численное моделирование и исследование стохастической чувствительности аттракторов системы [2,3]. На основе данной теории была изучена стохастическая чувствительность аттракторов модели (1.1) для аддитивного шума. Получено, что для параметра  $D_{12} = 0.00222$  наиболее чувствительным к воздействию аддитивного шума является зеленое равновесие (наибольшее значение  $\lambda_{max} = 24,0484495594315$ ). Для значения параметра  $D_{12} = 0.002271$  наиболее чувствительным оказался 4-цикл ( $\lambda_{max} = 315.285833999919$ ). В случае  $D_{12} = 0.00228$  наиболее чувствительным 5-цикл ( $\lambda_{max} = 1761,69481274425$ ). Также легко заметить, что элементы циклов имеют не одинаковую чувствительность.

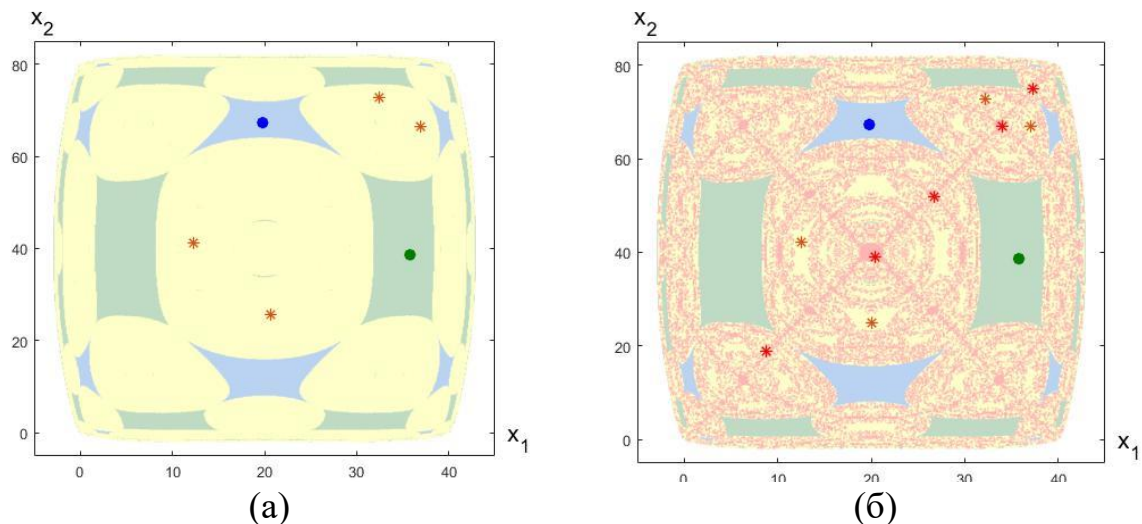


Рис. 3 – Бассейны притяжения и аттракторы при  $D_{21} = 0.0073$  и  
(а)  $D_{12} = 0.002271$ , (б)  $D_{12} = 0.00228$

С помощью матрицы стохастической чувствительности, построив вокруг равновесия или элементов цикла детерминированной системы доверительные эллипсы, можно изобразить геометрическое расположение случайных состояний стохастического аттрактора (см. Рис. 4). Эллипсы рассеивания так же являются удобным инструментом для определения значений интенсивности шума, при котором осуществляется переход с одного аттрактора на другой.

На рисунке 4 изображены переходы при значении параметра  $D_{12} = 0.00222$  от синего равновесия к зеленому и в обратную сторону. В ходе исследования выяснилось, что синее равновесие является менее чувствительным к влиянию аддитивного шума, нежели зеленое. После перехода от зеленого аттрактора к синему случайные состояния локализуются вокруг равновесия, но при попытке перехода от синего аттрактора к зеленому состояния продолжает

свободно «гулять» по бассейну притяжений. Это обусловлено тем, что для перехода с зеленого равновесия необходима меньшая интенсивность шума, и после перехода на синее равновесие оно не выходит за границы своего нового бассейна притяжения.

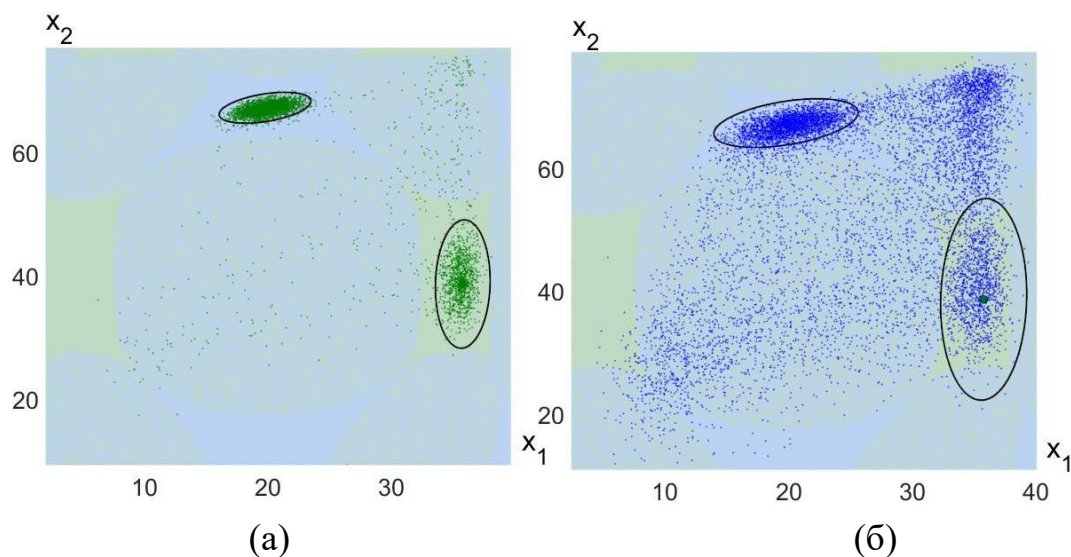


Рис. 4 – Индуцированные шумом переходы для  $D_{12} = 0.00222$ , при  
(а)  $\varepsilon = 1.1$ , (б)  $\varepsilon = 0.7$

Для интенсивности шума  $\varepsilon = 1.1$  наблюдается переход с обоих равновесий, ни одно из которых не способно удерживать случайное состояние в своей окрестности. Это хорошо видно по эллипсам рассеивания для  $\varepsilon = 0.7$  на рисунке 4 (б). В этом случае наблюдается формирование нового стохастического аттрактора, аналогов которому в детерминированной системе не существует.

### Библиографический список

1. Wulf Gaertner and Jochen Jungeilges. A non-linear model of interdependent consumer behaviour // Economics Letters – 1988 – 27(2):p.145–150.
2. Bashkirtseva, I., Ryashko, L., and Tsvetkov, I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for discrete dynamic systems // Dyn. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A17 – 2010 – p.501–515.
3. Irina Bashkirtseva, Lev Ryashko, Anna Sysolyatina. Analysis of stochastic effects in Kaldor-type business cycle discrete model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 36 – 2016 – p.446-456, ISSN 1007-5704.